

Décembre 2013

Réflexions sur la notion de distance

Reconnaître, évaluer, comparer, mesurer, et même expliquer et donc prévoir sont autant d'activités qui nécessitent qu'une idée de distance ou de longueur existe au moins de façon implicite.

Commençons par poser quelques questions simples et voyons que le concept de distance reste central. Il y en a bien plus (de questions) que celles évoquées ci-dessous.

Question 1 : *La notion d'espace où se situent les objets est-elle générale ?*

Quel est cet espace ? Le sens commun se réfèrera aux trois dimensions habituelles qui sont souvent appelées longueur, largeur et hauteur (x , y et z). C'est cependant donner une position dominante à la vie de tous les jours et à l'espace selon Euclide. L'espace dans lequel nos sens et nos appareils de mesure construits par nous nous placent reste proche de cela même si à la surface de la terre une géométrie sphérique en longitude, latitude et hauteur convienne mieux. Au niveau du système solaire et même de la galaxie, l'espace devient courbe et se mêle d'un quatrième ingrédient : le temps. On a donc dès ce stade la position de tout objet qui dépend de quatre variables : x , y , z , t . De plus elles sont liées au déplacement de l'observateur.

Il reste que dans toute géométrie spatiale, la longueur d'une ligne (droite, courbe) de plus court chemin qui joint deux positions existe et fait office de distance dans cet espace. Toutefois, ce cas est particulier. Les variables x , y , z , t ou plutôt $c.t$ (« c » est la vitesse de la lumière dans le vide, une constante universelle) ont les mêmes dimensions : des mètres, on peut donc comparer facilement des longueurs par des nombres et additionner et soustraire.

Pourtant pour nos appareils de mesure, les objets se situent aussi dans d'autres espaces avec d'autres dimensions. Une boule de pétanque aura un diamètre(1), un poids(2), un dessin superficiel(3), une texture de surface(4), une couleur(5), une répartition de sa masse(6) dans son volume (creuse mais comment), la densité ou dureté du matériau constitutif(7), etc. Nous avons déjà 7 dimensions (en plus de x , y , z , $c.t$) pour l'espace descriptif dans lequel situer cette boule et toutes les autres. De plus ces dimensions ne sont pas commensurables, le poids est en Newton, unité de force, le diamètre en mètres, unité de longueur, et ainsi de suite.

Comparer deux boules de pétanque c'est avoir une idée de la distance entre ces deux boules dans cet espace à 7 dimensions. Mais comment associer les dimensions afin de calculer une distance si on n'a pas le droit d'additionner des « pommes et des poires » ? Cet aspect et d'autres seront traités plus loin. Ce qui importe ici c'est de voir que **la notion d'espace x , y , z , $c.t$ est un cas particulier** et... particulièrement simple même si cela ne veut certes pas dire facile !

Question 2 : *Ce que l'on appelle une « différence » entre des choses est donc une distance ?*

La réponse est affirmative. La différence entre deux objets est une distance mesurée dans l'espace des caractéristiques. Cette distance est à la fois objective et subjective, elle est en plus très délicate à traiter. Prenons un exemple d'espace descriptif plus simple en matière de « boules de pétanque », ne gardons que deux descripteurs (on dit aussi « attributs ») : le poids et le diamètre.

Premièrement, le choix du nombre d'attributs est a priori arbitraire, nous en prenons deux ici, nous en avons 7, y-a-t-il un nombre exact ? En fait, ce choix est celui des attributs que l'on juge pertinent par rapport aux différences que l'on veut montrer. Ainsi l'exacte couleur de la surface ne semble pas devoir jouer sur le lancer et nous l'éliminons sans trop de risque. Par contre la répartition interne des masses dans la boule peut jouer un rôle important que nous ne pourrions pas exprimer dans notre espace à 2 D. Disons que le poids et le diamètre seraient un espace d'attributs assez pertinent pour du rangement dans un entrepôt ou pour concevoir des emballages adaptés aux transports de ces boules depuis l'usine vers les distributeurs.

Donc l'espace devient soumis aux buts que l'on se fixe.

Deuxièmement, la différence entre deux boules se calcule comment ? Prenons deux boules respectivement de 72 mm et 78 mm de diamètre et de 650g d'une part et 730g d'autre part.

Nous avons donc deux doublets (72mm, 650g) et (78mm, 730g). Deux points A et B dans un espace à 2D où les abscisses pourraient être les diamètres et les ordonnées les poids.

Si nous faisons comme d'habitude, en traçant une ligne de A à B et en mesurant la longueur de ce segment nous faisons plusieurs horreurs en même temps : Nous avons attribué par exemple 1 cm pour représenter 1mm de diamètre de façon à avoir un espace disponible pour les boules courantes (entre 70,5mm et 80mm) d'environ 10cm sur le papier. De même nous aurons attribué mettons 1cm pour 10g de poids en ordonnée permettant de couvrir aisément la gamme sur une quinzaine de cm papier (de 650g à 800g). En faisant cela nous avons donné des **échelles** purement destinées à notre facilité et non à une réalité physique quelconque et nous avons ramené des poids à des longueurs ce que rien ne nous autorise à faire .

Bref nous avons additionné des mètres et des grammes ce qui n'est pas mieux et tout aussi **interdit que d'ajouter des pommes et des poires**. La longueur du segment AB ne veut pas dire grand chose.

Tout au plus pourra-t-on dire que si une boule C est aussi mise sur un tel graphique, que la différence entre A et B semble plus petite que celle entre B et C parce que AB est plus petit que BC et donc que A « ressemble » plus à B que B ne « ressemble » à C.

Comment faire pour être plus proche d'une réalité quelconque ?

C'est un peu technique mais il faut « normaliser ». Un premier pas est de calculer la moyenne de la distribution statistique de chaque grandeur (M_d , moyenne des diamètres, M_p moyenne des poids) et dans le cas où c'est aussi possible les écarts-types, sorte de largeur des distributions statistiques (S_d et S_p). On pourrait ainsi dire que la **plupart** des boules appartiennent à un segment $M_d \pm S_d$ pour les abscisses et $M_p \pm S_p$ pour les ordonnées. Donc on aurait intérêt à user de deux nouvelles

mesures normalisées : $(D - Md) / Sd$ et $(P - Mp) / Sp$ qui sont centrées sur l'origine et d'échelles semblables puisqu'on divise par l'étendue du domaine donnée de façon indicative par l'écart-type.

Dans cet espace les « différences » seront plus utiles, débarrassées des différences d'échelles, et devenues sans dimension (grâce à la division de mm $(D - Md)$ par des mm (Sd) d'une part et des g $(P - Mp)$ par des g (Sp) d'autre part), elles sont désormais forcément commensurables.

On voit donc que même dans des cas tout simples, calculer une « différence » par une distance n'est pas aisé et est une démarche semée d'embûches.

Question 3 : *Reconnaître serait donc une affaire de distance seulement ?*

Pas seulement. Dans notre exemple, nous pourrions imaginer un graphique à 2D dans lequel on a mis quelques dizaines de points, chacun pour une vraie boule de tel ou tel fabricant. Prenons-en deux : le fabricant X et l'autre Y. On suppose que les boules fabriquées par X, pas toutes absolument pareilles, forment un nuage de points autour d'un point fictif C_x représentant la moyenne de ce que X fabrique et pareil pour Y : C_y . Cependant ces deux nuages de points peuvent se recouvrir partiellement et il y aurait donc de rares boules X qui sont à plus courte distance du prototype C_y que de celui de X, C_x , d'où des confusions possibles.

Il n'empêche, si on a une boule inconnue z et que l'on veut connaître son fabricant, le plus simple est par exemple de calculer les distances entre z et C_x d'une part et z et C_y d'autre part. On serait alors tenté de dire que le fabricant de z est celui dont le prototype est le plus proche ! C'est une parmi de **nombreuses** manières de faire. Toutes ont leurs avantages et leurs inconvénients, aucune n'est parfaite.

Donc « reconnaître » c'est, entre autres, faire un usage aussi pertinent que possible de distances dans un espace d'attributs.

Si on met une boule de Lyon avec son poids et son diamètre, cela ne voudra plus rien dire ! Nous aurions introduit un « vilain petit canard ». Comment le savoir ?

Pourtant nous, humains, reconnaissons des choses complexes comme des visages, des caractères, des humeurs, des degrés de culpabilité, des idées et des idéaux... Comment faisons-nous ? Quelle est la validité de ces reconnaissances ? Ce sont ces reconnaissances qui déterminent pourtant nos choix !

Nous pourrions opter pour plus de prudence et ne pas mélanger les attributs dans une longueur résultante. On pourrait se dire que si une **majorité** d'attributs normalisés de A est plus proche de ceux de B que de C, alors A « ressemble » plus à B qu'à C. Le problème c'est que rien n'empêche alors qu'en même temps A soit plus « proche » de B que de C *et* que B soit plus « proche » de C que de A on en viendrait à dire que A ressemble plus à B qu'à C et que B ressemble plus à C qu'à A.

Donc d'une part, on trouverait que A et B sont ensembles et C plus loin. Alors que d'autre part on dirait que B et C sont ensembles et A plus loin. Tout cela avec des jeux de majorité qui n'ont ici rien de paradoxal sauf que cela peut amener à des choix fort différents.

Exemple : A = (5,9,14, 22, 2) B = (6, 10, 13, 35, 8) C = (7, 11, 45, 2, 7) avec majorité = 3/5

En conclusion : **reconnaître et différencier est une chose subtile, complexe et surtout propre à nous égarer.**

Question 4 : *Est-ce vital de reconnaître ?*

Certainement que oui ! En même temps vital et mortel. Reconnaître une proie d'un prédateur et donc faire choix entre l'attaque et la fuite est très vital. Reconnaître un poison potentiel d'un aliment aussi. Reconnaître un partenaire disponible pour la reproduction également du moins pour l'espèce concernée.

Le développement d'une espèce est très dépendante de ses capacités de reconnaissance et donc implicitement de mesure des différences. Cela à tous les échelons de l'évolution. On peut donc se dire que les erreurs systématiques se paient par la disparition de l'espèce en question. Que les évaluations de ces distances soient innées ou apprises, elles sont nécessaires, certaines doivent être rapide pour des choix vitaux imminents et d'autres peuvent donner lieu à diverses supputations pour autant que l'espèce en question soit munie des outils pour cela.

On voit donc que la géométrie de l'espace des attributs nous servant à reconnaître joue un rôle essentiel. Et on n'a pas beaucoup d'idées sur la géométrie et les attributs qui nous permettent de reconnaître une humeur, une intention ou un désir d'un membre de sa propre espèce. Comme Monsieur Jourdain avec la prose, nous procédons aux reconnaissances sans vraiment le savoir et en pensant en plus que c'est partagé. Partagé, soit, mais à quel point ?

La tolérance est le premier pas dans la direction où l'on admet que plusieurs « géométries » et plusieurs « espaces de description » peuvent coexister. L'un n'étant pas plus « vrai » que l'autre même si les choix qui en résultent peuvent être antagonistes. Ce n'est qu'une solution assez primitive, même si apparemment efficace, d'éliminer les entités porteuses d'une *autre* géométrie. C'est en cela que reconnaître peut être vital et parfois mortel.

Question 5 : *un être humain (ou non) fait donc ce genre de calcul ?*

Oui et non. C'est un peu comme si on comparait le « faire » de manière ouverte ou fermée.

Un oiseau fait son nid de manière fermée dans le sens où les techniques utilisées, les lois de la physique, de la chimie même et de la résistance des matériaux, ne sont pas disponibles pour d'autres constructions. Seulement pour le nid. L'oiseau ne dispose pas d'une version abstraite de son plan mais seulement d'une façon d'exécuter des instructions. Un ingénieur en herbe qui aurait à sa disposition les mêmes techniques, pourra, grâce aux talents de son corps et de son cerveau, les faire monter d'un niveau d'abstraction et, du coup, les associer à d'autres et les appliquer à *d'autres* cas. La construction d'un abri, et pourquoi pas d'une maison ou d'un pont ou autre chose encore.

Il y a donc certainement au moins deux manières extrêmes de calculer une distance et par là une différence (et donc une ressemblance) : la manière fermée, automatique et

essentiellement inconsciente. La manière ouverte, applicative d'une abstraction et (apparemment) consciente.

Mais quand faisons-nous, nous les humains, usage de l'une ou de l'autre ?

C'est sans doute dépendant d'un ensemble de facteurs liés à l'urgence, la complexité, le savoir disponible, le désir ou la peur et bien d'autres encore.

Ainsi quand vous dites : « Il y a chez cette personne (ou ce groupe de personnes) un décalage entre ce qu'ils disent et ce qu'il font », on imagine les prodiges de calculs fermés et ouverts impliqués. Et cela parfois de manière vague, voire distraite...

Car qui dit décalage, dit distance, différence. Dans quel espace d'attributs, choisis comment et pour quoi ?

Décalages entre paroles et actions, cela veut dire qu'on ne cherche pas à mesurer les différences, les distances entre « boules de pétanques » mais entre des entités bien plus complexes et non réductibles facilement l'une à l'autre. C'est un problème a priori insurmontable que pourtant nous croyons et devons souvent pouvoir solutionner d'un seul regard.

Sans doute avons-nous des images internes concernant « nos paroles » et « nos actes » qui nous permettent d'évaluer une sorte de modèle ou de simulation interne dans laquelle les notions de distances sont plus intuitives et qui sont plus pertinentes pour ne pas dire moins « n'importe quoi ».

Il n'empêche que ces différences-là, nous pouvons *éventuellement* envisager de les évaluer pour nous-mêmes et être d'une prudence extrême quand il s'agit d'autres isolés ou en groupe.

En plus, nous sommes, nous les êtres humains, assez incapables de faire la part de calcul fermé et ouvert dans toute comparaison un peu complexe comme celle ci-dessus (actes et paroles). Nous prenons et nous en convenons ou bien nous nous insurgons, ajoutant un volet émotionnel à ce qui n'est au départ qu'une mesure de distance...

L'évaluation des distances, c'est notre force et aussi notre faiblesse.

Question 6 : *Nietzsche a écrit : La vérité est une armée mobile de métaphores*